חשמל ומגנטיות - פתרון תרגיל 5

שאלה 1

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{q}{r^2} e^{-r/a} + \frac{1}{a}\frac{q}{r} e^{-r/a}$$

ממשפט גאוס המטען הכלול בתוך מעטפת
כדורית ברדיוס R הוא

$$4\pi Q(R) = E(R)\cdot 4\pi R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q(R) = q e^{-R/a} + \frac{R}{a} e^{-R/a}$$

ולכן המטען בכל המרחב $(r \geq 0)$ $\quad Q(R\to\infty) = 0$

וכולל המטען בראשית $(r=0)$ $\quad Q(R\to 0) = q$

ולכן יש מטען נקודתי q בראשית הצירים
ומטען שלילי $-q$ מרוח במרחב $0<r$.

$$r \neq 0 : \qquad \mathrm{div}\, E = 4\pi\rho$$

בקואורדינטות כדוריות
החלק הרדיאלי:

$$\mathrm{div}\, E = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E(r)\right)$$

ולכן

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-r/a}$$

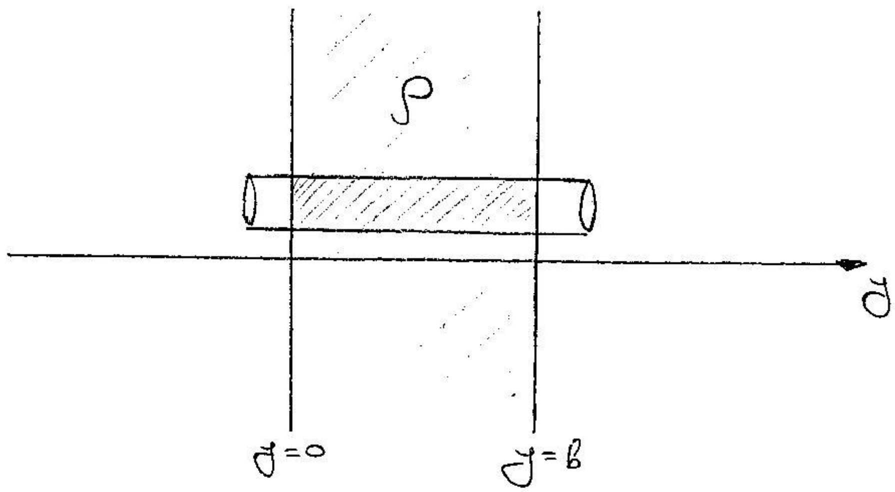
ולכן סך המטען במרחב $0<r$

$$\int_0^\infty \rho(r)\, 4\pi r^2 dr = -q\int_0^\infty \frac{r}{a^2} e^{-r/a} dr = -\frac{q}{a}\int_0^\infty e^{-r/a} dr =$$

$$= -q$$

בצורה כזאת אפשר לתאר אטום; גרעין חיובי
ומטען שלילי מרוח, כאשר רובו נמצא ב- $r \lesssim a$.

שאלה 2



את השדה החשמלי מוצאים ממשפט גאוס, כאשר מעטפת גאוס היא גליל שצירו ניצב לפני המישורים.

מקבלים:

$$E = \begin{cases} -2\pi\rho b & y<0 \\ -2\pi\rho b + 4\pi\rho y & 0 \le y \le b \\ 2\pi\rho b & y>b \end{cases}$$

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

ולכן הפוטנציאל

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi\rho b y + C_1 & y \le 0 \\ 2\pi\rho b y - 2\pi\rho y^2 + C_2 & 0 \le y \le b \\ -2\pi\rho b y + C_3 & y \ge b \end{cases}$$

נדרוש $C_2=0$ ולכן מרציפות נמצא:

$$C_1 = 0$$
$$C_3 = 2\pi\rho b^2$$

נבדוק שב- $0 \le y \le b$ מתקיימת משוואת פואסון:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -4\pi\rho$$

שאלה 3

בהנחה $r \ll d$ ניתן לומר כי המטענים מפולגים באופן אחיד על המעטפות ⟸ מותר להשתמש בנוסחה $U=\frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i$ הנכונה במקרה של מטענים נקודתיים.

א)

$$\varphi = \frac{Q/2}{r} + \frac{Q/2}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{2}\varphi + \frac{Q}{2}\varphi\right] = \frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right)$$

ב)

$$U = \frac{1}{2}\, Q \cdot \frac{Q}{r} = \frac{Q^2}{2r}$$

ג)

$$\text{(א)} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{Q}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right)$$

$$\text{(ב)} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{Q}{r} \quad \varphi_2 = \frac{Q}{d}$$

ד) כאשר מחברים כדור הטעון במטען Q עם כדור לא טעון – ההתפלגות הסופית תהיה כמו ב א) כי הפוטנציאלים ישתוו. מטען $Q/2$ יעבור בתיל והאנרגיה של המערכת תרד ב-

$$U_{ב'} - U_{א'} = \frac{Q^2}{2r} - \frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d}\right) = \frac{Q^2}{4}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)$$

האנרגיה הנגרעת תלך לחימום תוך כדי הזרימה בתיל.